2003年　京都大　前期　文系

《文系総評》　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ でどれだけ落とさなかったかで決まるのでしょう．そこで少しでも落とした人は，$\boxed{4}$, $\boxed{5}$ で部分点でも稼いでおかなければいけないということでしょう．

$\boxed{1}$　$\dfrac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す．すなわち小数第 k 位の数を a_k とする．このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ を求めよ．

《解》　$\dfrac{23207}{111}=0.207207\cdots$ であるから，

$$a_1=2\,,a_2=0\,,a_3=7\,,a_4=2\,,a_5=0\,,a_6=7\,,\cdots\cdots$$

よって m を0以上の整数として

(i)　$n=3m$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\frac{2}{3}+\frac{7}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{7}{3^6}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^{3m-2}}+\frac{7}{3^{3m}}$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{3^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{3m-3}}\right)=\frac{25}{27}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{3^{3m}}}{1-\dfrac{1}{3^3}}=\frac{25}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)=\frac{25}{26}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

(ii)　$n=3m+1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\frac{2}{3}+\frac{7}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{7}{3^6}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^{3m-2}}+\frac{7}{3^{3m}}+\frac{2}{3^{3m+1}}$

$$=\frac{25}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)+\frac{2}{3^{3m+1}}=\frac{1}{26}\left(25-\frac{23}{3^{3m+1}}\right)=\frac{1}{26}\left(25-\frac{23}{3^n}\right)$$

(iii)　$n=3m+2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\frac{1}{26}\left(25-\frac{23}{3^{3m+1}}\right)=\frac{1}{26}\left(25-\frac{23}{3^{n-1}}\right)$

よって求める和は

n が3の倍数のとき $\dfrac{25}{26}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$，$n-1$ が3の倍数のとき $\dfrac{1}{26}\left(25-\dfrac{23}{3^n}\right)$，$n-2$ が3の倍数のとき $\dfrac{1}{26}\left(25-\dfrac{23}{3^{n-1}}\right)$　……**(答)**

［コメント］　単に等比数列の和の問題です．慎重に計算するのみです．

$\boxed{2}$ xy 平面上で，放物線 $C : y = x^2 + x$ と，直線 $l : y = kx + k - 1$ を考える．このとき次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ．

(2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P，Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする．k が (1) で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ．

《解》 (1) 題意は $x^2 + x = kx + k - 1$ つまり $x^2 - (k-1)x - (k-1) = 0$……① が相異なる 2 つの実数解をもつことと同値だから，求める条件は

$$(k-1)^2 + 4(k-1) = (k-1)(k+3) > 0 \qquad \therefore \quad k < -3\,,\, k > 1 \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) ① の解を $\alpha\,,\,\beta$ $(\alpha < \beta)$ とおくと

$$L = (\beta - \alpha)\sqrt{1 + k^2}$$

$$S = -\int_\alpha^\beta \{x^2 - (k-1)x - (k-1)\}\,dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$\therefore \quad \frac{S}{L^3} = \frac{1}{6(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$k < -3\,,\, k > 1$ のとき $1 < k^2 < \infty$ だから，求める範囲は

$$0 < \frac{S}{L^3} < \frac{1}{6 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

［コメント］ 「定型問題」と言ってもいいでしょう．

$\boxed{3}$ 四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i) $\mathrm{OA} \perp \mathrm{BC}, \mathrm{OB} \perp \mathrm{AC}, \mathrm{OC} \perp \mathrm{AB}$

(ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

をみたしている．このとき，この四面体は正四面体であることを示せ．

《解》 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}\,, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}\,, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと，

(i)より $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} \cdots\cdots ①$$

また(ii)より $\triangle\mathrm{OAB} = \triangle\mathrm{OBC} = \triangle\mathrm{OCA}$

$$\therefore \quad \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 = \left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2 - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2 = \left|\vec{c}\right|^2\left|\vec{a}\right|^2 - \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)^2$$

①を用いると

$$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2 = \left|\vec{c}\right|^2\left|\vec{a}\right|^2 \qquad \therefore \quad \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|$$

このとき $\triangle\mathrm{OAB}, \triangle\mathrm{OBC}, \triangle\mathrm{OCA}$ はすべて合同な 2 等辺三角形となるが，斜辺を x，底辺を y とすると，$\triangle\mathrm{OAB} = \triangle\mathrm{ABC}$ より

$$\frac{1}{2}y\sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}y^2\sin 60^\circ \qquad \therefore \quad x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}y^2 \qquad \therefore \quad x = y$$

が得られるから結論が示された．

［コメント］ 文系には「ちょうどいい」問題でしょう．案外，これで差が付くのかもしれません．

$\boxed{4}$ p は 3 以上の素数であり，x，y は $0 \leqq x \leqq p, 0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする．このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y を $2p$ で割った余りが等しければ，$x = y$ であることを示せ．

《解》　仮定より $x^2 - y^2$ つまり $(x+y)(x-y)$ は $2p$ で割り切れるが，p は素数であるから，$x+y$ または $x-y$ が p で割り切れる．

ところが仮定より $0 \leqq x+y \leqq 2p, -p \leqq x-y \leqq p$ であるから

$$x+y=0, x+y=p, x+y=2p, x-y=-p, x-y=0, x-y=p$$

の少なくとも 1 つが成り立つ．そしてこれを成り立たせる (x, y) は

$$(x, y)=(0, 0), (0, p), (p, 0), (p, p)$$

のいずれかである．

そこで $x \neq y$ とすると，$(x, y)=(0, p), (p, 0)$ のいずれかしかないが，このとき $x^2 - y^2 = \pm p^2$ となり右辺は奇数である．これは $x^2 - y^2$ が $2p$ で割り切れることに反する．

よって $x = y$ が成り立つ．

［コメント］　京大の整数としては難しい方ではありませんが，落とした人も多いかもしれません．

$\boxed{5}$ 4チームがリーグ戦を行う．すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ1回ずつ対戦する．引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする．勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする．1位のチーム数の期待値を求めよ．

《解》 チームを $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ として，チーム A_k が1位のとき $X_k=1$，そうでないとき $X_k=0$ という値をとる確率変数 X_k を考えると，1位のチーム数 X は $X=X_1+X_2+X_3+X_4$ と表せるから $E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)$

A_k が3勝0敗で1位となる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

A_k が2勝1敗で1位となるのは，A_k が2勝1敗して，その1敗した相手チームが全勝しないときであるから，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}\cdot{}_3\mathrm{C}_2=\dfrac{9}{32}$

A_k が1位となるのは，上のいずれかの場合しかないから

$$P(X_k=1)=\frac{1}{8}+\frac{9}{32}=\frac{13}{32} \qquad \therefore\ E(X_k)=P(X_k=1)=\frac{13}{32}$$

$$\therefore\ E(X)=\frac{13}{32}+\frac{13}{32}+\frac{13}{32}+\frac{13}{32}=\frac{13}{8}$$ ……(答)

《別解》 チームを A，B，C，D とし，1位のチーム数を X とする．

(i) $X=1$ のうち，A が1位のときは A は全勝しなければならず，そのとき B，C，D は少なくとも1敗しているから，確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$$\therefore\ P(X=1)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_1=\frac{1}{2}$$

(ii) $X=3$ のうち，A，B，C が1位のときは D が全敗しなければならない．

A が B に負ける場合，A は C に勝たなければならず，このとき B が C に負ければよいから，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

A が C に負ける場合も同じだから

$$P(X=3)=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_3=\frac{1}{8}$$

そして $X=4$ になることはないから

$$P(X=2)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$\therefore\ E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{13}{8}$$ ……(答)

［コメント］　普通には**《別解》**の方でしょうが，$X=1,2,3$ のときの確率の計算にかなりの注意力が必要です．限られた時間内に，すべてを間違えずに求められる人は多くないでしょう．**《解》**のように**「カウンター」**を用いることができればかなり簡単になりますが，この解法をとった人も多いとは思えません．