2003 年　大阪大学　前期　文系

《文系総評》　$\boxed{1}$ (2)と $\boxed{2}$ (1) の論証問題が難しく，大多数の受験生は答案としてまとめられなかったと思われます．従って，残りの $\boxed{1}$ (1)，$\boxed{2}$ (2) と $\boxed{3}$ にじっくりと時間をかけて，５割以上の得点を目指したいものです．

$\boxed{1}$　平面ベクトル $\vec{p}=(p_1, p_2),\ \vec{q}=(q_1, q_2)$ に対して $\{\vec{p}, \vec{q}\}=p_1q_2-p_2q_1$ と定める．

(1)　平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して $\{\vec{a}, \vec{b}\}=l, \{\vec{b}, \vec{c}\}=m, \{\vec{c}, \vec{a}\}=n$ とするとき $l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ．

(2)　(1) で l, m, n がすべて正であるとする．このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r, s, t を用いて $\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すことができることを示せ．

《解》　(1)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ とすると

$$l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=(a_1b_2-a_2b_1)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+(b_1c_2-b_2c_1)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}+(c_1a_2-c_2a_1)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，結論が示された．

(2)　$l=a_1b_2-a_2b_1>0$ より $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は，適当な実数 x，y を用いて $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と表される．また，(1) より

$$\vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}-\frac{l}{m}\vec{c},\ \vec{b}=-\frac{m}{n}\vec{a}-\frac{l}{n}\vec{c}$$

が成り立つから

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}=\frac{my-nx}{m}\vec{b}-\frac{lx}{m}\vec{c}=\frac{nx-my}{n}\vec{a}-\frac{ly}{n}\vec{c}$$

従って

$x\geqq0, y\geqq0$ ののとき　　$(r, s, t)=(x, y, 0)$

$x\leqq0, , y\geqq\dfrac{n}{m}x$ のとき　　$(r, s, t)=\left(0, \dfrac{my-nx}{m}, -\dfrac{lx}{m}\right)$

$y\leqq0, , y\leqq\dfrac{n}{m}x$ のとき　　$(r, s, t)=\left(\dfrac{nx-my}{n}, 0, -\dfrac{ly}{n}\right)$

とすると，０以上の実数 r, s, t を用いて $\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すことができる．

［コメント］　(1) は成分計算をするだけですが，(2) では，方針すら見えない受験生が多かったことでしょう．難問です．

2 自然数 m に対して，m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする．たとえば $f(72)=6$ である．ただし $f(1)=1$ とする．

(1) m，n を自然数，d を m，n の最大公約数とするとき

$$f(d)f(mn)=f(m)f(n)$$

となることを示せ．

(2) 2つの箱 A，B のそれぞれに 1 番から10 番までの番号札が 1 枚ずつ10 枚入っている．箱 A，B から 1 枚ずつ札を取り出す．箱 A から取り出した札の番号を m，箱 B から取り出した札の番号を n とするとき $f(mn)=f(m)f(n)$ となる確率 p_1 と $2f(mn)=f(m)f(n)$ となる確率 p_2 を求めよ．

《解》 (1) d の素因数の集合を $D=\{d_1, d_2, \cdots, d_k\}$ とし，m の素因数のうち D の要素でない数の集合を $M=\{m_1, m_2, \cdots, m_p\}$，$n$ の素因数のうち D の要素でない数の集合を $N=\{n_1, n_2, \cdots, n_q\}$ とする．$M\cap N=\phi$（空集合）であるから

$$f(m)=(m_1m_2\cdots m_p)(d_1d_2\cdots d_k),\ f(n)=(n_1n_2\cdots n_q)(d_1d_2\cdots d_k)$$

$$f(d)=(d_1d_2\cdots d_k),\ f(mn)=(m_1m_2\cdots m_p)(n_1n_2\cdots n_q)(d_1d_2\cdots d_k)$$

が成り立つ．よって，$f(d)f(mn)=f(m)f(n)$ を満たす．

(2) $f(mn)=f(m)f(n)$ を満たすのは m と n の最大公約数が 1 の場合である．また，$2f(mn)=f(m)f(n)$ を満たすのは m と n の最大公約数が $2^k\ (k=1,2,\cdots)$ の場合である．従って，m と n の最大公約数を表した右表より

$$p_1=\frac{63}{100},\ p_2=\frac{23}{100}$$ ……(答)

10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10
9	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

［コメント］ (1) では，「互いに素な自然数 x, y があるとき，関数 f は任意の自然数 k, l に対して $f(x^ky^l)=f(x)f(y)$ を満たす」ということを利用するのですが，かなりの難問でしょう．なお，(2) では (1) の結果を利用して数え上げるだけです．(1) の証明ができていなくても点数をもらえますから，(2) だけは完答したいものです．

$\boxed{3}$ 放物線 $C:y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,0),\mathrm{B}(b,0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,m\alpha),\mathrm{Q}(\beta,m\beta)$，原点を O とする．ただし，$a<b,m\neq 0,\alpha<\beta$ とする．線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいときの m の値を求めよ．

《解》 $-x^2+2x+1=0$ の 2 解が a,b $(a<b)$ であるから

$$a=1-\sqrt{2},b=1+\sqrt{2}$$

$mx=-x^2+2x+1$ つまり $x^2+(m-2)x-1=0$ の 2 解が α,β $(\alpha<\beta)$ であるから

$$\alpha=\frac{-(m-2)-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2},\beta=\frac{-(m-2)+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$

線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積を S_1，線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする．

$$\int_\alpha^\beta(-x^2+2x+1-mx)dx=\int_\alpha^\beta-(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\int_a^b(-x^2+2x+1)dx=\int_a^b-(x-a)(x-b)dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

であり，$a<0<b,\alpha<0<\beta$ であるから

$m>0$ のとき $\quad S_1-S_2=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{6}(b-a)^3$

$m<0$ のとき $\quad S_1-S_2=\frac{1}{6}(b-a)^3-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

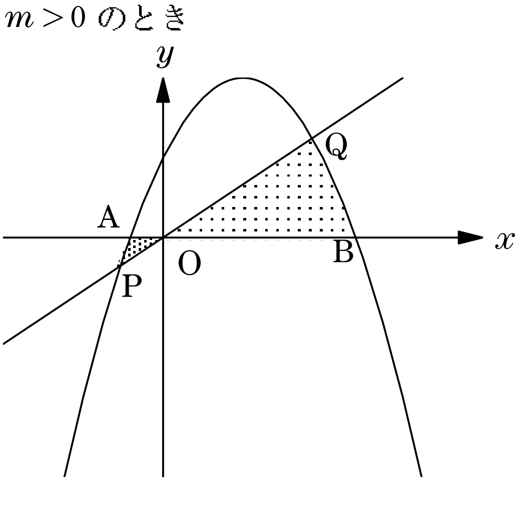
よって

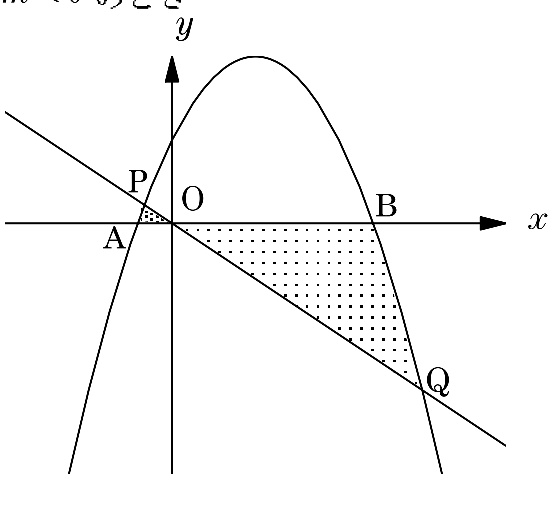
$$S_1=S_2\Leftrightarrow\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(b-a)^3\Leftrightarrow\beta-\alpha=b-a\Leftrightarrow\sqrt{(m-2)^2+4}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore\ (m-2)^2+4=8$$

$$\therefore\ m=4\quad(\because m\neq 0)$$

……(答)





［コメント］ 標準的な積分の問題で，S_1,S_2 を m の正負で場合分けして求めたとしても制限時間内に十分解けるでしょう．ぜひ完答したいものです．