１００７　定積分とその面積への応用

☒**A－1**☒　$f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続な関数であるとき，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$ が収束する（一定値に近づく）ことが知られている．この極限値を「$f(x)$ の a から b までの定積分」と呼び，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と表す．

(1)　区間 $[a,b]$ で $f(x)\geqq 0$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ はどんな図形的意味をもつか．

(2)　上の定義に基づいて $\displaystyle\int_1^3 x^2dx$ を求めよ．

☒**A－2**☒　区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に関して，次の(1)，(2)を証明し，(3)に答えよ．

(1)　$a<\xi<b$ を満たす適当な実数 ξ を用いると，$\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\xi)$ が成り立つ．
（積分の平均値の定理）

(2)　$f(x)$ の原始関数（微分すると $f(x)$ になる関数）の１つを $F(x)$ とすると，
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ が成り立つことを証明せよ．　**（微積分学の基本定理）**

(3)　(2)を用いて $\displaystyle\int_1^3 x^2dx$ を求めよ．

☒**A－3**☒　次の各領域の面積を求めよ．

(1)　$0\leqq y\leqq -x^2-2x+3$　　(2)　$x^2-x-2\leqq y\leqq 0$　　(3)　$x^2-x-1\leqq y\leqq x+2$

☒**A－4**☒　次の各々を証明せよ．

(1)　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{a+c}^{b+c}f(x-c)dx=\int_{a-c}^{b-c}f(x+c)dx$

(2)　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

(3)　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)$

☒**B－1**☒　次の各領域の面積を求めよ．

(1)　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と曲線 $y=\min\left\{\dfrac{5}{4}x+\dfrac{7}{4},4-x\right\}$ とで囲まれる領域．

(2)　放物線 $x=y^2$ と直線 $y=x-2$ とで囲まれる領域．

(3)　原点を中心とする半径２の円の $y\geqq 0$ の部分の弧と放物線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ とで囲まれる領域．

☒**B－2**☒　点 A$(2,0)$ から放物線 $C:y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{9}{2}$ へ傾きが負の接線 l を引くとき，C と l と直線 $x=2$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

☒**B－3**☒　(1)　放物線 $y=2x^2$ と直線 $y=x+2$ とで囲まれる領域の面積を求めよ．

(2)　２つの放物線 $y=2x^2-5x$, $y=-x^2+x+12$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

☒**B－4**☒　点 $(1,3)$ を通る直線のうちで，放物線 $y=2x^2$ と囲む面積が最小となるような直線の方程式とそのときの面積を求めよ．