確率の和が期待値？！

宮　田　敏　美

【例１】　正しいサイコロを12回投げるとき，６の目が出る回数Xの期待値（平均値）を求めよ．

発想法　たとえばサイコロを12回投げるとき，６の目が出る回数をXとすると，各Ｘに対する確率は次表の通りです．

X	0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	12
$P(X)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^{12}$	${}_{12}C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11}$	${}_{12}C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$	$\cdots$	${}_{12}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{12-k}$		$\left(\frac{1}{6}\right)^{12}$

よって，Xの期待値は

$$E(X)=1\cdot{}_{12}C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)+2\cdot{}_{12}C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+\cdots+k\cdot{}_{12}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{12-k}+\cdots+12\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{12}$$

です．これが２に等しいことを示す能力も必要ですが，もっと簡単に期待値を求めることはできないでしょうか．

次の表はＡ君，Ｂ君，Ｃ君，……がサイコロを12回ずつ振り，各回に６の目が出た回数（０回か１回）を記録したものです．

人＼回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
A	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	3
B	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
平均	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	2

今求めている期待値は一番右側の列の平均値ですが，これが各回の平均値$\frac{1}{6}$の合計に等しいことは明らかでしょう．つまり，<u>１回サイコロを投げたとき６の目が出る回数</u>の期待値は<u>６の目が出る確率</u>$\frac{1}{6}$に等しく，12回サイコロを投げたとき６の目が出る回数Xの期待値$E(X)$は，その和$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{6}=2$に等しいというわけです．

答案例　k回目に６の目が出る回数は１か０であるが，その期待値E_kは，６の目が出る確率$\frac{1}{6}$に等しいから，求める期待値は

$$E(X)=E_1+E_2+\cdots\cdots+E_{12}=\frac{1}{6}\times12=2$$

【例２】　当りくじ 10 本とはずれくじ 90 本を含む合計 100 本のくじから，20 人の人が順に１本ずつ引くとき，当りくじを引く人数の期待値を求めよ．ただし，各人が引いたくじは元へ戻さないものとする．

答案例

k 番目に引く人が当たりくじを本数は１か０であるが，その期待値 E_k は，k 番目の人が当たりくじを引く確率に等しく $\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$ であるから，求める期待値は

$$E=E_1+E_2+\cdots\cdots+E_{12}=\frac{1}{10}\times 20=2$$

【例３】　箱の中に，１から n までの数字をそれぞれ１つずつ書いた n 枚のカードが入っている．箱から無作為に１枚のカードをとり出して，その数字を記録し，箱に戻す．この試行を k 回くり返してそれまでに記録された相異なる数字の個数を X とするとき，X の期待値 E を求めよ．

答案例

数字 i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が記録される回数は１か０であるが，その期待値は，その数字が少なくとも１回出る確率 $1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k$ に等しいから，求める期待値は

$$E=E_1+E_2+\cdots\cdots+E_n=n\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right\}$$

【例４】　一辺の長さが１の正四面体 ABCD がある．点 P はこの正四面体の辺上を毎秒１の速さで動き，各頂点に達したとき，そこから出る辺のうちの１辺を $\dfrac{1}{3}$ の確率で選んで進む．P は時刻 $t=0$ において頂点 A にあるとする．

$1\leqq t\leqq n$ において P が A にある回数の期待値 E_n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

答案例

$t=k$ のときに点 P が A にある回数は１か０であるが，その期待値は，$t=k$ のときに点 P が A にある確率 p_k に等しいから，求める期待値は

$$E_n=\sum_{k=1}^{n}p_k$$

ところで，

$$p_k=\frac{1}{3}(1-p_{k-1})\Longleftrightarrow p_k-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_{k-1}-\frac{1}{4}\right)$$

より　$$p_k-\frac{1}{4}=\left(p_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$p_1=0$ より　$$p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

よって，

$$E=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}=\frac{1}{4}\left\{n-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$