【１】　整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $\begin{cases} a_1=1\,,a_2=3 \\ a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n \qquad (n=1\,,2\,,\cdots) \end{cases}$ によって定める.

⑴　a_n が偶数となることと，ｎが３の倍数となることは同値であることを示せ.

⑵　a_n が 10 の倍数となるための条件を ⑴ と同様な形式で求めよ.　（93．東大）

《Ｓ社の解答》　⑴　すべての自然数ｍに対して

「$a_{3m-2}\,,a_{3m-1}$ が奇数，a_{3m} が偶数」……①

であることを，数学的帰納法によって示す.

(ⅰ)　$m=1$ のとき；$a_1=1\,,a_2=3\,,a_3=3a_2-7a_1=2$

したがって，$m=1$ のとき ① は成り立つ.

(ⅱ)　$m=k$ のとき；$a_{3k-2}\,,a_{3k-1}$ が奇数，a_{3k} が偶数であると仮定する.

$$a_{3k+1}=3a_{3k}-7a_{3k-1}=3\times\text{偶数}-7\times\text{奇数}=\text{奇数}$$

$$a_{3k+2}=3a_{3k+1}-7a_{3k}=3\times\text{奇数}-7\times\text{偶数}=\text{奇数}$$

$$a_{3k+3}=3a_{3k+2}-7a_{3k+1}=3\times\text{奇数}-7\times\text{奇数}=\text{偶数}$$

したがって，$m=k+1$ のときにも成り立つ.

よって，a_n が偶数となることと，ｎが３の倍数となることは同値である.

⑵　a_n が 10 の倍数 $\Longleftrightarrow a_n$ が２かつ５の倍数

a_n を５で割ったときの剰余がｐのとき，$a_n\equiv p$ と表すと

$$a_1\equiv1\,,a_2\equiv3\,,a_3\equiv2\,,a_4=3a_3-7a_2=-15\equiv0$$

これより，すべての自然数ｍに対して

「$a_{4m-3}\equiv1\,,a_{4m-2}\equiv3\,,a_{4m-1}\equiv2\,,a_{4m}\equiv0$」……②

であると推定できる．これを数学的帰納法により示す.

(ⅰ)　$m=1$ のとき；自明

(ⅱ)　$m=k$ のとき；

$$a_{4k+1}=3a_{4k}-7a_{4k-1}\equiv3\times0-7\times2\equiv-14\equiv1$$

$$a_{4k+2}=3a_{4k+1}-7a_{4k}\equiv3\times1-7\times0\equiv3$$

$$a_{4k+3}=3a_{4k+2}-7a_{4k+1}\equiv3\times3-7\times1\equiv2$$

$$a_{4k+4}=3a_{4k+3}-7a_{4k+2}\equiv3\times2-7\times3\equiv-15\equiv0$$

　したがって，$m=k+1$ のときも ② は成り立つ．
以上から，すべての自然数 m に対して ② は成り立つ．
よって，a_n が 5 の倍数となることと，n が 4 の倍数となることとは同値であり，求める解は

「a_n が 10 の倍数となることと，n が 12 の倍数となることとは同値である．」

［上の解答に対するコメント］　数学的帰納法を「$n=k$ のとき成り立つことを仮定して，$n=k+1$ とき成り立つことを示す」にこだわるから，上のような解答になる．⑴では「$n=k$ のとき成り立てば $n=k+3$ のとき成り立つ」を示そうと考え，⑵では「$n=k$ のとき成り立てば $n=k+4$ のとき成り立つ」を示そうと考えるに限る．
ところで，「a_n を 5 で割ったときの剰余が p のとき，$a_n \equiv p$ と表す」という定義では，たとえば $a_{4k+1}\equiv -14$ などは使えないはずです．

《シンプルかつスマートな解答》

⑴　$a_{n+3}=3a_{n+2}-7a_{n+1}=3(3a_{n+1}-7a_n)-7a_{n+1}=2a_{n+1}-21a_n$ であるから

「a_n が偶数ならば a_{n+3} も偶数であり，a_n が奇数ならば a_{n+3} も奇数である」

そして，$a_1=1\,,a_2=3\,,a_3=3a_2-7a_1=2$ より，$a_1\,,a_2$ は奇数であり a_3 は偶数であるから結論は成り立つ．

⑵　$a_{n+4}=2a_{n+2}-21a_{n+1}=2(3a_{n+1}-7a_n)-21a_{n+1}=-15a_{n+1}-14a_n$ であるから

「a_n が 5 の倍数ならば a_{n+4} も 5 の倍数であり，a_n が 5 の倍数でないならば a_{n+4} も 5 の倍数でない」

そして，$a_1=1\,,a_2=3\,,a_3=3a_2-7a_1=2\,,a_4=3a_3-7a_2=-15$ より，$a_1\,,a_2\,,a_3$ は 5 の倍数でなく a_4 は 5 の倍数であるから，

「a_n が 5 の倍数となることと，n が 4 の倍数となることとは同値である」

これと⑴より

「a_n が 10 の倍数となることと，n が 12 の倍数となることとは同値である．」

《合同式を用いてさらにシンプルにすると》

(1) a,b が 2 の倍数の差を無視して等しいとき $a \equiv b$ と表すことにすると,

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \equiv a_{n+1} - a_n$$

$$\therefore \quad a_{n+3} \equiv a_{n+2} - a_{n+1} \equiv (a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} \equiv -a_n \equiv a_n$$

$$\therefore \quad a_n \equiv 0 \Longleftrightarrow a_{n+3} \equiv 0$$

そして $a_1 \equiv 1$, $a_2 \equiv 1$, $a_3 = 3a_2 - 7a_1 = 2 \equiv 0$ であるから結論成立.

(2) a,b が 5 の倍数の差を無視して等しいとき $a \equiv b$ と表すことにすると,

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \equiv 3(a_{n+1} + a_n)$ であるから

$a_{n+4} \equiv 3(a_{n+3} + a_{n+2}) \equiv 3(4a_{n+2} + 3a_{n+1}) \equiv 3(15a_{n+1} + 12a_n) \equiv 3(2a_n) \equiv a_n$

$\therefore \quad a_n \equiv 0 \Longleftrightarrow a_{n+4} \equiv 0$

そして $a_1 = 1 \equiv 1$, $a_2 = 3 \equiv 3$, $a_3 \equiv 3(a_2 + a_1) \equiv 12 \equiv 2$, $a_4 \equiv 3(a_3 + a_2) \equiv 15 \equiv 0$ であるから結論成立.

【２】　正の整数 n に対して $x_n = r^n \sin n\theta \left(r>0\,,0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．$x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ であるとき $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ の値を求めよ．（89．阪大）

《Ｓ社の解答》　条件から

$$x_1 = r\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdots\cdots①\quad x_2 = r^2\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{8}\cdots\cdots②$$

② より　$2r^2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$　　① を代入して $r\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

①÷② より $\tan\theta = \sqrt{3}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，したがって $r=\dfrac{1}{2}$　　以上より $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sin\dfrac{n\pi}{3}$

正の整数 m に対して

$$x_{6m-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6m-5}\sin\frac{(6m-5)}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^6}\right)^{m-1}$$

$$x_{6m-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6m-4}\sin\frac{(6m-4)}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2^6}\right)^{m-1}$$

以下同様にして

$$x_{6m-3} = 0\,,x_{6m-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2^6}\right)^{m-1}$$

$$x_{6m-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2^6}\right)^{m-1}\,,x_{6m} = 0$$

$$T_m = x_{6m-5}+x_{6m-4}+x_{6m-3}+x_{6m-2}+x_{6m-1}+x_{6m}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2^6}\right)^{m-1}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\} = \frac{21\sqrt{3}}{2^6}\left(\frac{1}{2^6}\right)^{m-1}$$

第 n 部分和を S_n とおくと

$$S_{6m} = T_1+T_2+\cdots\cdots+T_m = \frac{21\sqrt{3}}{2^6}\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^6}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^6}\right)^{m-1}\right\}$$

$$= \frac{21\sqrt{3}}{2^6}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{2^6}\right)^m}{1-\dfrac{1}{2^6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2^6}\right)^m\right\}\qquad \therefore\ \lim_{m\to\infty}S_{6m} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

また，

$$S_{6m+1} = S_{6m}+x_{6m+1}\,,S_{6m+2} = S_{6m+1}+x_{6m+2}\,,S_{6m+3} = S_{6m+2}+x_{6m+3}$$

$$S_{6m+4} = S_{6m+3}+x_{6m+4}\,,S_{6m+5} = S_{6m+4}+x_{6m+5}$$

で $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sin\dfrac{n\pi}{3} = 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty}S_{6m} = \lim_{n\to\infty}S_{6m+1} = \cdots\cdots = \lim_{n\to\infty}S_{6m+5} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ゆえに　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}S_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

［上の解答に対するコメント］　$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\sin\frac{k\pi}{3}$ を求めるには $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cos\frac{k\pi}{3}$ も考え，虚数の等比数列の和に持ち込むに限ります.

《シンプルかつスマートな解答》

$X_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\frac{n\pi}{3}\,,Y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sin\frac{n\pi}{3}$ とおくと

$$X_n+iY_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)=\left\{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n}$$

$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\alpha$ とおくと $S_n=\sum_{k=1}^{n}(X_k+iY_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^k=\frac{\alpha-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$

$n\to\infty$ のとき $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cos\frac{n\pi}{3}\to 0\,,\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sin\frac{n\pi}{3}\to 0$ であるから $\alpha^n\to 0$

$$\therefore\ S_n\to\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}i}{4}}{1-\frac{1+\sqrt{3}i}{4}}=\frac{1+\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)}{9+3}=\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}Y_k=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

【３】　平面上において，７点 A,P,Q, R,S, R′, S′ を図のようにとる．ただし，

$\mathrm{AP}=a$, $\mathrm{PQ}=b$, $\mathrm{QR}=\mathrm{QR}'=c$,

$\mathrm{RS}=\mathrm{R'S'}=d$

$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{SRQ}=\angle\mathrm{S'R'Q}=\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$

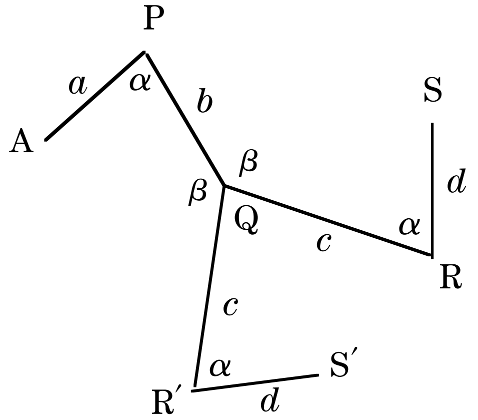
$\angle\mathrm{RQP}=\angle\mathrm{PQR'}=\beta$ $(0\leqq\beta\leqq\pi)$

である．このとき

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2$$

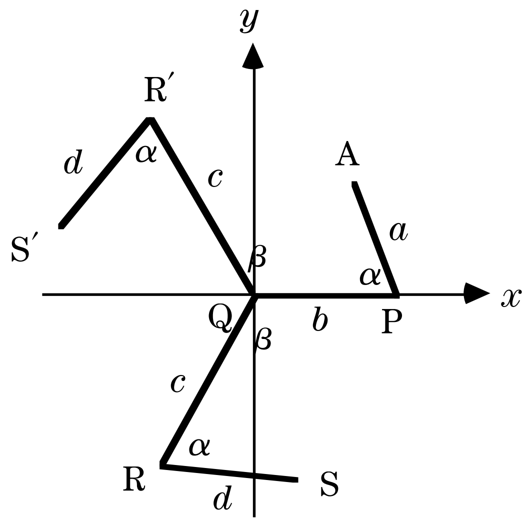
を $\sin\alpha$, $\sin\beta$ および a,b,c,d を用いて表せ．

（98．阪大）



《Ｏ社の解答》　図のように座標軸を定め，

$\mathrm{Q}(0\,,0)$, $\mathrm{P}(b\,,0)$ とする．



$$\overrightarrow{\mathrm{QA}}=\overrightarrow{\mathrm{QP}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-a\cos\alpha\\ a\sin\alpha\end{pmatrix}\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{R'S'}}$ は x 軸の正の向きと

$$\beta+(\pi-\alpha)=\pi+\beta-\alpha$$

の角をなし

$$\overrightarrow{\mathrm{QS'}}=\overrightarrow{\mathrm{QR'}}+\overrightarrow{\mathrm{R'S'}}=c\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}\cos(\pi+\beta-\alpha)\\ \sin(\pi+\beta-\alpha)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}c\cos\beta-d\cos(\beta-\alpha)\\ c\sin\beta-d\sin(\beta-\alpha)\end{pmatrix}\cdots\cdots②$$

β に $-\beta$ を代入して $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$ を得るので，

$$\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\begin{pmatrix}c\cos\beta-d\cos(\beta+\alpha)\\ -c\sin\beta+d\sin(\beta+\alpha)\end{pmatrix}\cdots\cdots③$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QS'}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|$ から

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{QS'}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{QS'}}\right|^2-2\left(\overrightarrow{\mathrm{QS}}-\overrightarrow{\mathrm{QS'}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{QA}}$$
$$=-2\left(\overrightarrow{\mathrm{QS}}-\overrightarrow{\mathrm{QS'}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{QA}}$$

②，③ から

$$\overrightarrow{\mathrm{QS}}-\overrightarrow{\mathrm{QS'}}=\begin{pmatrix}c\cos\beta-d\cos(\beta+\alpha)\\ -c\sin\beta+d\sin(\beta+\alpha)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c\cos\beta-d\cos(\beta-\alpha)\\ c\sin\beta-d\sin(\beta-\alpha)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-d\{\cos(\beta+\alpha)-\cos(\beta-\alpha)\}\\ -2c\sin\beta+d\{\sin(\beta+\alpha)+\sin(\beta-\alpha)\}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2d\sin\beta\sin\alpha \\ -2c\sin\beta+2d\sin\beta\cos\alpha \end{pmatrix}=2\sin\beta\begin{pmatrix} d\sin\alpha \\ -c+d\cos\alpha \end{pmatrix}$$

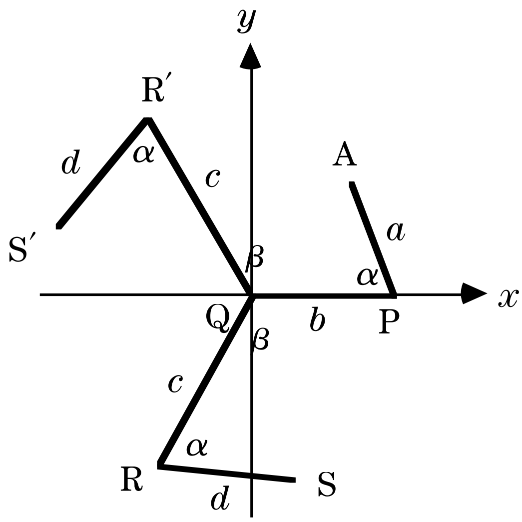
さらに1から

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2=-2\cdot 2\sin\beta\begin{pmatrix} d\sin\alpha \\ -c+d\cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b-a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$=-4\sin\beta\{\,d\sin\alpha(b-a\cos\alpha)+a\sin\alpha(-c+d\cos\alpha)\,\}$$

$$=-4\sin\beta\cdot(bd-ac)\sin\alpha=4(ac-bd)\sin\alpha\sin\beta$$

《S 社の解答》　Q を原点，QP を実軸とする複素数平面を考え，$\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{R}(v)$, $\mathrm{R}'(v')$, $\mathrm{S}(w)$, $\mathrm{S}'(w')$ とおくと，



$$v=c\{\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)\}=c(\cos\beta-i\sin\beta)$$

$v'=c(\cos\beta+i\sin\beta)$ で

$$\frac{u-b}{0-b}=\frac{a}{b}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}$$

$$\therefore\quad u=(b-a\cos\alpha)+i(a\sin\alpha)$$

$\dfrac{w-v}{0-v}=\dfrac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}$ から

$$w-v=d(-\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

$$=-d\{\cos(\alpha+\beta)-i\sin(\alpha+\beta)\}$$

$$\therefore\quad w=\{c\cos\beta-d\cos(\alpha+\beta)\}+i\{-c\sin\beta+d\sin(\alpha+\beta)\}$$

同様に，$\dfrac{w'-v'}{0-v'}=\dfrac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}$ から

$$w'=\{c\cos\beta-d\cos(\alpha-\beta)\}+i\{c\sin\beta+d\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2=|w-u|^2-|w'-u|^2=(w-u)(\overline{w}-\overline{u})-(w'-u)(\overline{w'}-\overline{u})$$

$$=(w'-w)\overline{u}+(\overline{w'-w})u$$

これは $(w'-w)\overline{u}$ の実部の 2 倍に等しい.

$$w'-w=-d\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}+i\{2c\sin\beta+d\sin(\alpha-\beta)-d\sin(\alpha+\beta)\}$$

$$=-2d\sin\alpha\sin\beta+i\{2\sin\beta(c-d\cos\alpha)\}$$

$$(w'-w)\overline{u}=2\sin\beta\{-d\sin\alpha+i(c-d\cos\alpha)\}\{(b-a\cos\alpha)-i(a\sin\alpha)\}$$

ゆえに

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2=2\cdot 2\sin\beta\{-d\sin\alpha(b-a\cos\alpha)+a\sin\alpha(c-d\cos\alpha)\}$$

$$=4\sin\beta\{(ac-bd)\sin\alpha\}=4(ac-bd)\sin\alpha\sin\beta$$

［上の解答に対するコメント］　第１感で複素数平面を思いつきたいものです．ただし，せっかく複素数平面で考えながら［Ｓ社］のように実部と虚部の計算に持ち込むとやはり繁雑な計算に追い込まれます．複素数で扱うなら実部と虚部に分けるのは最後の手段で，できるだけ１文字で表した複素数のままで考えなければ意味がありません．それには「角 α 回転の複素数」と「角 β 回転の複素数」つまり「オペレーターとしての複素数」に注目すべきです．

《シンプルかつスマートな解答》

複素数平面とみなし点 $\mathrm{A}, \mathrm{S}, \mathrm{S}'$ の複素数をそれぞれ z_0, z_1, z_2 と表す．また，

$$\omega = \cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha) = -\cos\alpha + i\sin\alpha,\quad \lambda = \cos\beta + i\sin\beta$$

とすると

$$z_0 = b + a\omega,\ z_2 = c\lambda + c\lambda\cdot\frac{d}{c}\omega = \lambda(c+d\omega),\ z_1 = c\overline{\lambda} + c\overline{\lambda}\cdot\frac{d}{c}\omega = \overline{\lambda}(c+d\omega)$$

$|z_2| = |z_1|$ を用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AS}'^2 &= |z_1 - z_0|^2 - |z_2 - z_0|^2 = -(z_1\overline{z}_0 + \overline{z}_1 z_0) + (z_2\overline{z}_0 + \overline{z}_2 z_0) \\
&= \overline{z}_0(z_2 - z_1) + z_0(\overline{z}_2 - \overline{z}_1) = (b + a\overline{\omega})(c + d\omega)(\lambda - \overline{\lambda}) + (b + a\omega)(c + d\overline{\omega})(\overline{\lambda} - \lambda) \\
&= (\lambda - \overline{\lambda})\{(b + a\overline{\omega})(c + d\omega) - (b + a\omega)(c + d\overline{\omega})\} \\
&= (\lambda - \overline{\lambda})\{ac(\overline{\omega} - \omega) - bd(\overline{\omega} - \omega)\} = (\lambda - \overline{\lambda})(\overline{\omega} - \omega)(ac - bd) \\
&= (2i\sin\beta)(-2i\sin\alpha)(ac - bd) = 4(ac - bd)\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

【４】　ｎを１以上の整数とする．ｎ次の整式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

とその導関数 $f'(x)$ の間に $nf(x)=(x+p)f'(x)$ という関係があるとする．ただし，ｐは定数である．このとき $f(x)=a_0(x+p)^n$ であることを示せ．　　（98．阪大）

《Ｏ社の解答》

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+(n-k)a_kx^{n-k-1}+\cdots+a_{n-1}$$

よって，$nf(x)=(x+p)f'(x)$ の両辺の x^{n-k} の項の係数，定数項を比べて

$$na_k=p(n-k+1)a_{k-1}+(n-k)a_k\ \ (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\therefore\ \ a_k=\frac{p(n-k+1)}{k}a_{k-1}$$

これを繰り返し用いて，

$$a_k=\frac{p(n-k+1)}{k}\cdot\frac{p(n-k+2)}{k-1}a_{k-2}=\cdots$$

$$=\frac{p^k(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{k!}a_0=p^k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}a_0=a_0{}_n\mathrm{C}_kp^k$$

$p^0=1$ とすると，$k=0$ のときも含めて成立し，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}=a_0\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}p^k=a_0(x+p)^n$$

《Ｓ社の解答》　$nf(x)=(x+p)f'(x)$

両辺をｘで微分すると

$$nf'(x)=f'(x)+(x+p)f''(x)\qquad\therefore\ (n-1)f'(x)=(x+p)f''(x)$$

以下同様にして，順次両辺を微分すると

一般に，ｋ回（$1\leqq k\leqq n-1$）行うと

$$\therefore\ (n-k)f^{(k)}(x)=(x+p)f^{(k+1)}(x)\cdots\cdots②$$

が成り立つ．

1と2において $k=1,2,\cdots\cdots,n-1$ とおいたｎ個の式を辺々掛け合わせると

$$n(n-1)\cdots2\cdot1\cdot f(x)=(x+p)^nf^{(n)}(x)\qquad\therefore\ f(x)=\frac{1}{n!}(x+p)^nf^{(n)}(x)$$

ここで　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ だから

ｎ回微分すると　　$f^{(n)}(x)=n!a_0$ だから $f(x)=a_0(x+p)^n$ である．

［上の解答に対するコメント］　現行課程に「微分方程式」という章はなくなりましたが，こういう問題は今後も出るでしょう．つまり，「微分方程式」を満たす関数の一般形を証明させる問題です．たとえば「$f'(x)=-kf(x)$ を満たす関数は，適当な定数 A を用いて $f(x)=Ae^{-kx}$ と表せることを証明せよ」というような問題です．もちろん $\{e^{x}f(x)\}'=0$ を示せばよいわけです．この問題も同様に考えれば
$\left\{\dfrac{f(x)}{(x+p)^n}\right\}'=0$ を示せばよいことがわかり，これは極めて簡単です．

《シンプルかつスマートな解答》

$$\left\{\frac{f(x)}{(x+p)^n}\right\}'=\frac{(x+p)^n f'(x)-n(x+p)^{n-1}f(x)}{(x+p)^{2n}}=\frac{(x+p)f'(x)-nf(x)}{(x+p)^{n+1}}=0$$

より，$\dfrac{f(x)}{(x+p)^n}$ は定数であるからそれを A とおくと，$f(x)=A(x+p)^n$

仮定より $f(x)$ の x^n の係数は a_0 であるから $A=a_0$　　$f(x)=a_0(x+p)^n$

【５】　$a \geqq b > 0$ とする．自然数 n に対して次の不等式を証明せよ．

$$a^n - b^n \leqq \frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$$

（82．名大）

《Ｓ社の解答》　$n=1$ のとき，左辺＝右辺 $=a-b$

$n=2$ のとき，左辺＝右辺 $=a^2-b^2$

よって，$n=1,2$ では与式は成り立つ．そこで，$n \geqq 3$ のときを考える．

$b>0$ から，両辺を b^n で割り $\dfrac{a}{b}=x$（$\geqq 1$）とおくと，与式は

$$x^n - 1 \leqq \frac{n}{2}(x-1)(x^{n-1}+1) \ (x \geqq 1)$$

となるから，これを証明してもよい．いま

$$f(x)=n(x-1)(x^{n-1}+1)-2(x^n-1)$$

とおくと

$$f'(x)=n(n-2)x^{n-1}-n(n-1)x^{n-2}+n$$

$$f''(x)=n(n-2)(n-1)x^{n-2}-n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$=n(n-2)(n-1)x^{n-3}(x-1)$$

$x \geqq 1$ のとき $f''(x) \geqq 0$　($\because$　$n \geqq 3$) で $f'(x)$ は単調増加．

よって，$x \geqq 1$ のとき $f'(x) \geqq f'(1)$

ここで，$f'(1)=n(n-2)-n(n-1)+n=0$　　$\therefore$　$f'(x) \geqq 0$　($x \geqq 1$)

そこで，$x \geqq 1$ では $f(x)$ は単調増加で

$x \geqq 1$ のとき　$f(x) \geqq f(1)$

ここで，$f(1)=0$　　$\therefore$　$f(x) \geqq 0$　($x \geqq 1$)　　$\therefore$　$x^n - 1 \leqq \dfrac{n}{2}(x-1)(x^{n-1}+1)$

［上の解答に対するコメント］　これで十分ですが，実は結論を

$\dfrac{1}{n}(a^n-b^n) \leqq \dfrac{1}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$ と変形すると，左辺が $\displaystyle\int_b^a x^{n-1}\,dx$ に等しく，右辺が台形の面積に等しくなります．しかしこれを気付くのは，特に試験場では難しいでしょうね．

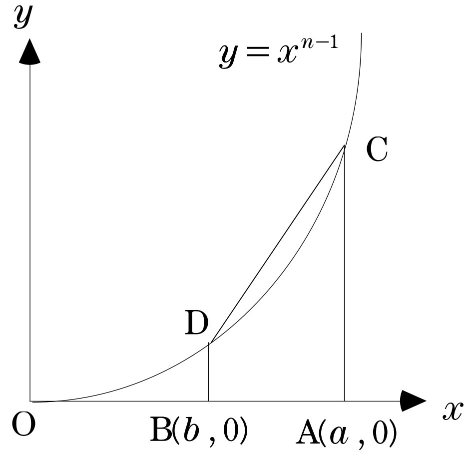
《シンプルかつスマートな解答》

《別解》　$f(x)=x^{n-1}$ とおくと

$f'(x)=(n-1)x^{n-2}$, $f''(x)=(n-1)(n-2)x^{n-3}$

であるから，$x>0$ では $f''(x)\geqq 0$ を満たす．よって $f(x)$ は $x>0$ で広義の意味で下に凸である．

したがって図のように $\displaystyle\int_b^a x^{n-1}\,dx$ は台形 ACDB の面積より小さいか等しい．



$$\therefore\ \int_b^a x^{n-1}\,dx \leqq \frac{1}{2}(b-a)(a^{n-1}+b^{n-1})$$

これから

$$\frac{1}{n}(a^n-b^n)\leqq\frac{1}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$$

$$\therefore\ a^n-b^n\leqq\frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1}+b^{n-1})$$